

# Фрактальная размерность траектории и область локализации коллоидной частицы в плазме: численное моделирование

Косс К.Г., Лисина И.И., Петров О.Ф.

ОИВТ РАН

МФТИ

***Scientific-Coordination Workshop on  
Non-Ideal Plasma Physics***

*December 7-8, 2023,  
Moscow, Russia*



# Активные броуновские частицы

**ScienceNews**  
MAGAZINE OF THE SOCIETY FOR SCIENCE & THE PUBLIC



## Like birds of a feather, sperm flock together

*Fluid dynamics of medium leads to collective swimming*

By Tom Siegfried 3:39pm, March 17, 2016 Citations

Fluctuation and Noise Letters  
Vol. 4, No. 1 (2004) L151–L159  
© World Scientific Publishing Company



## RANDOM WALK THEORY APPLIED TO DAPHNIA MOTION

NIKO KOMIN\*, UDO ERDMANN<sup>†</sup> and LUTZ SCHIMANSKY-GEIER

Oecologia (Berlin) (1983) 56:234–238



## Analyzing Insect Movement as a Correlated Random Walk

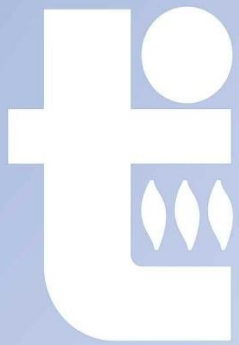
P.M. Kareiva<sup>1</sup> and N. Shigesada<sup>2</sup>

doi:10.1038/nature09116

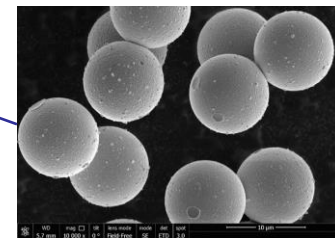
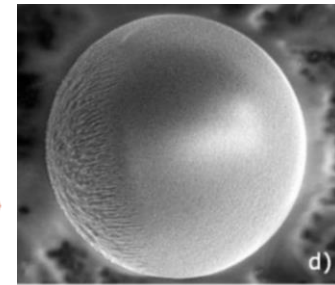
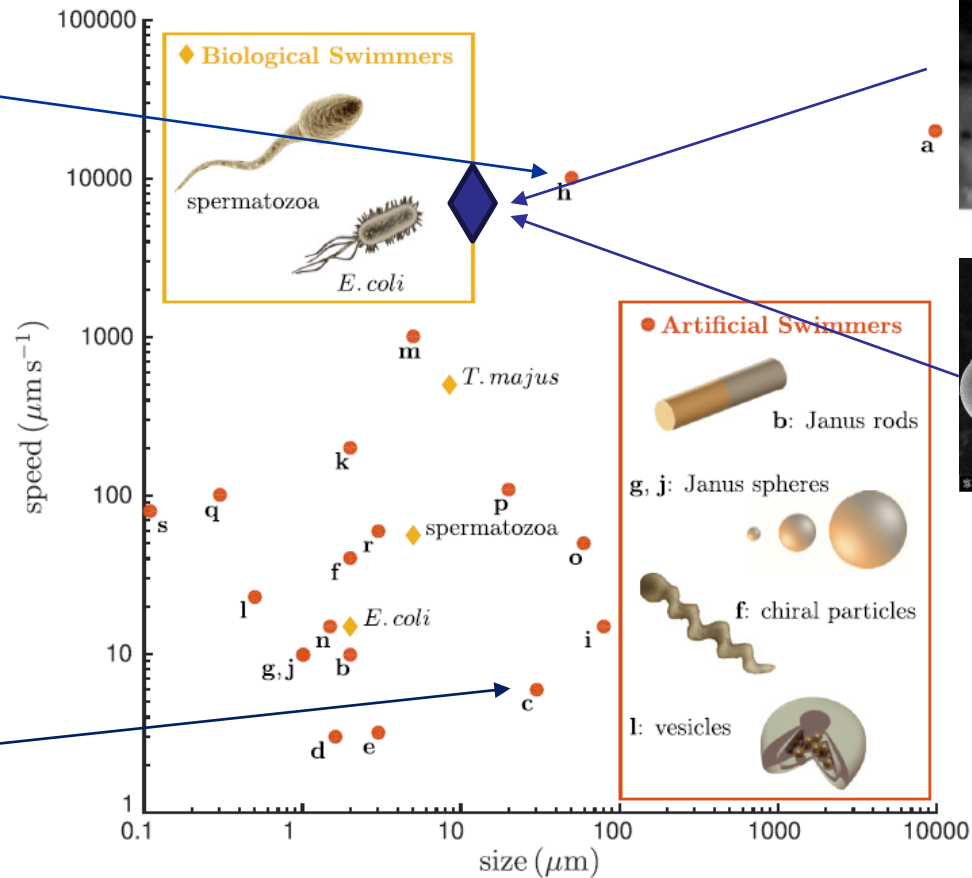
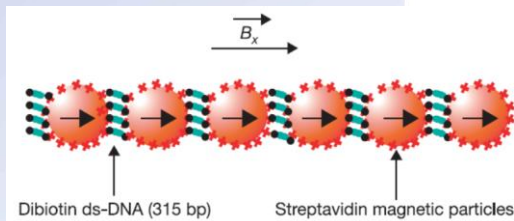
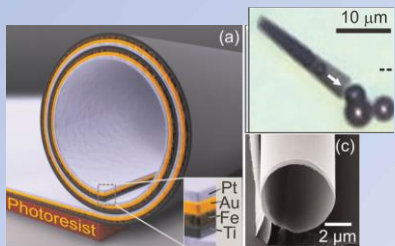


## Environmental context explains Lévy and Brownian movement patterns of marine predators

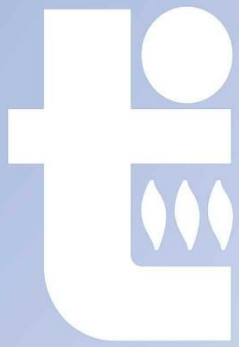
Nicolas E. Humphries<sup>1,2</sup>, Nuno Queiroz<sup>1,3,4</sup>, Jennifer R. M. Dyer<sup>1</sup>, Nicolas G. Pade<sup>1,4</sup>, Michael K. Musyl<sup>5</sup>



# Искусственные и природные активные броуновские частицы



C. Bechinger, R. Di Leonardo, H. Löwen, C. Reichardt, G. Volpe and Giov. Volpe, Rev. Mod. Phys. **88**, 045006 (2016)



# Как измерить сложность объекта?



## Сложность описания [бит]

- Информация
- Энтропия
- Алгоритмическая сложность
- Минимальная длина описания
- Энтропия Реньи
- Длина программного кода
- Размерность
- **Фрактальная размерность**
- Сложность Лемпеля-Зива



## Сложность создания [время / энергия / деньги]

- Вычислительная сложность
- Информационная сложность
- Логическая глубина
- Термодинамическая глубина
- Стоимость
- Закодированность

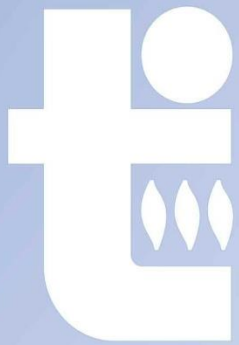


## Степень организации

- Эффективная сложность
- Метрическая энтропия
- **Фрактальная размерность**
- Избыточная энтропия
- Стохастическая сложность
- Степень детализации
- Эффективная сложность измерения
- Иерархическая сложность
- Грамматическая сложность
- Взаимная информация
- Пропускная способность канала
- Корреляция
- Хранимая информация
- Организация

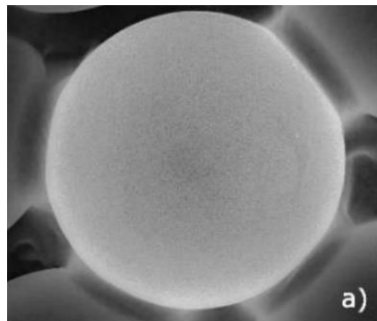


Seth Lloyd (1960 - ) prof. of mechanical engineering and physics at MIT

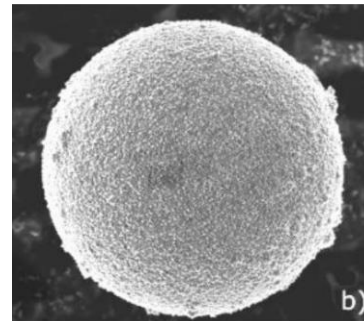


# Эксперименты в коллоидной плазме

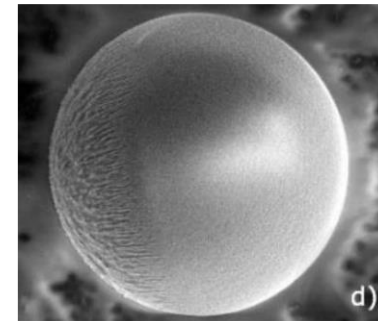
- Одна частица ~10 мкм в ловушке 35 мм
- ВЧ разряд, аргон
- мощность лазера 0,05 – 1,5 Вт



MF

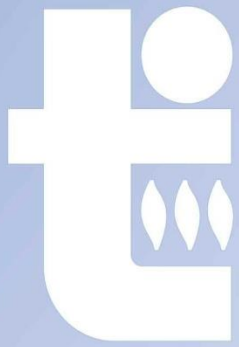


MF+Cu



Янус MF+Fe

Arkar, K.; Vasiliev, M.M.; Petrov, O.F.; Kononov, E.A.; Trukhachev, F.M.  
Dynamics of Active Brownian Particles in Plasma.  
*Molecules* **2021**, 26(3), 561.



# Параметры моделирования

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{\text{fr}} + \mathbf{F}_{\text{Br}} + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_0$$

$$\mathbf{F}_{\text{fr}} = -m\nu_{\text{fr}}\dot{\mathbf{r}}$$

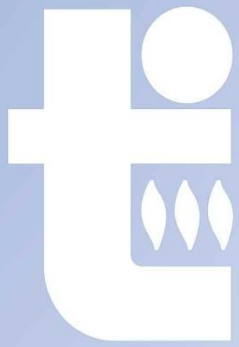
$$\langle F_{\text{Br}}^x(0)F_{\text{Br}}^x(t) \rangle = 2\nu_{\text{fr}} \frac{T \cdot \Delta t}{m} \delta(t)$$

$$\mathbf{F}_0 = -\nabla U_0 = -m\omega_0^2 \mathbf{r}$$

$$\mathbf{F}_A = F_A \mathbf{n}(t)$$

rotational diffusion coefficient  $\omega = \frac{3D_T}{4R^2}$

translational short-time diffusion coefficient  $D_T = \frac{T}{\nu_{\text{fr}}m}$

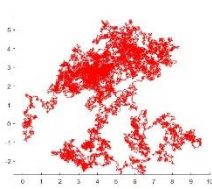
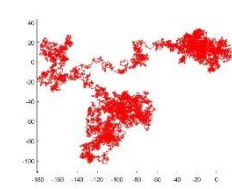
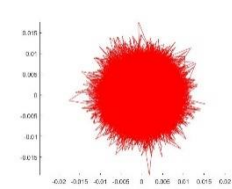
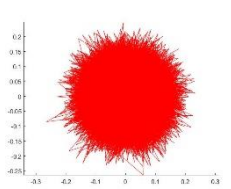
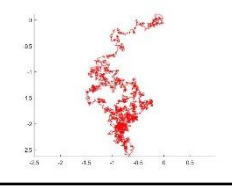
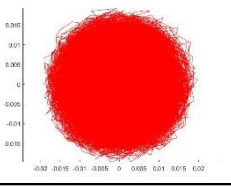
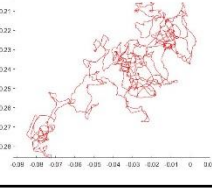
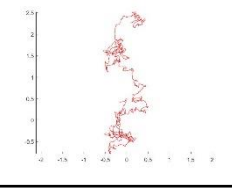
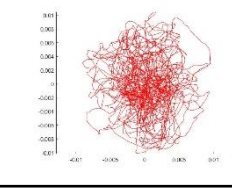
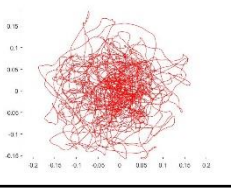
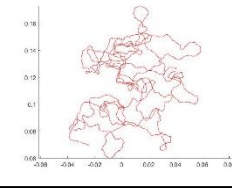
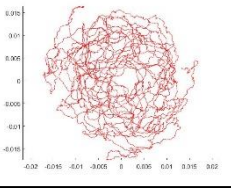


# Параметры моделирования

$$m\ddot{r} = F_{fr} + F_{Br} + F_A + F_0$$

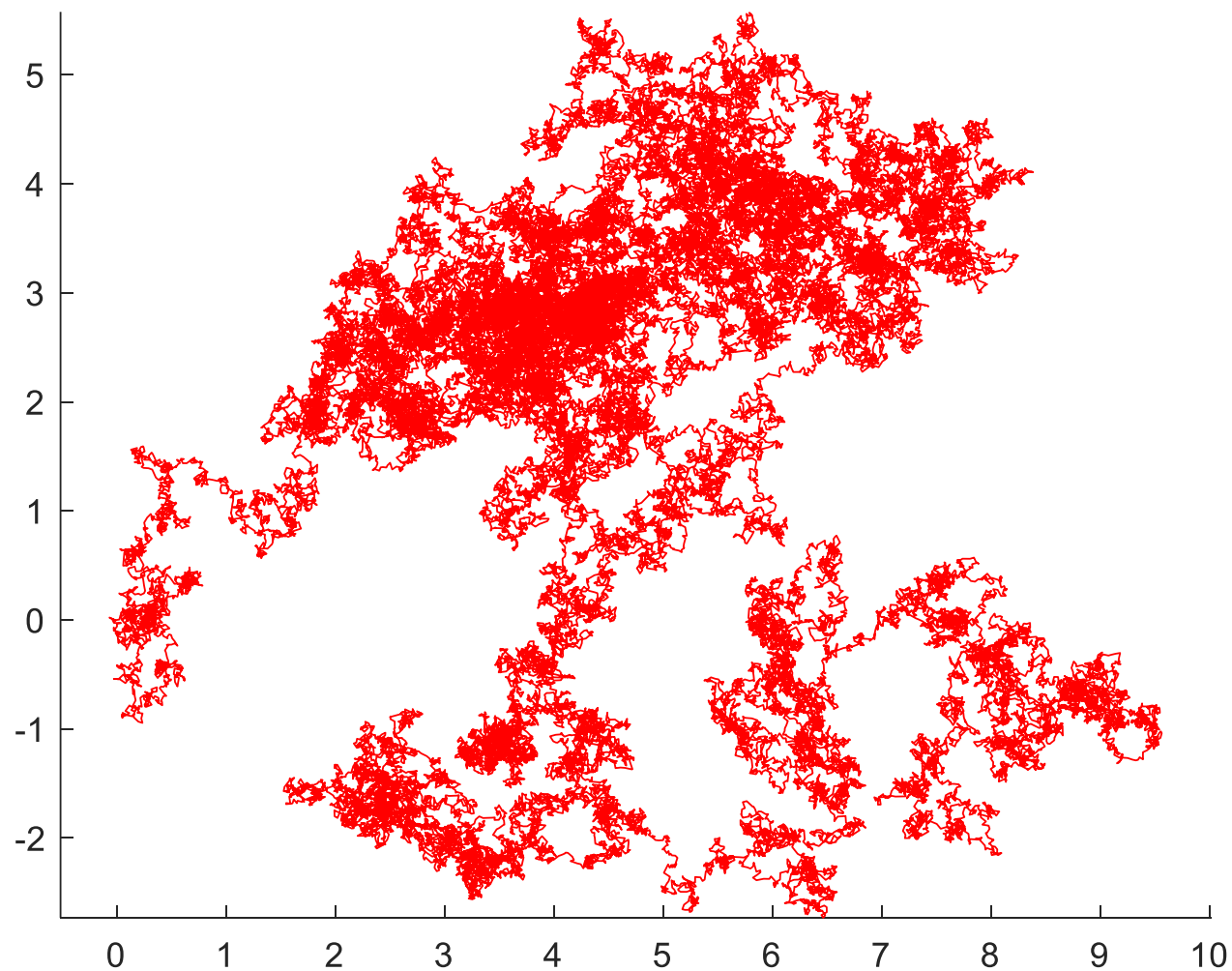
	active/ passive $V_{sp}$ [cm/s]	trapped/free $\omega_0^2$ [s <sup>-2</sup> ]	underdamped/ overdamped $v_{fr}/\omega$	ballistic/ diffusive $dt \cdot v_{fr}$
“Diffusive”	0	0	0.1	100
	0	4	0.1	100
	0.56	0	0.1	100
	0.56	4	0.1	100
“Ballistic”	0	0	0.1	0.01
	0	4	0.1	0.01
	0.56	0	0.1	0.01
	0.56	4	0.1	0.01
Active free	0.01	0	100	0.01
	0.01	0	100	1
	0.01	0	100	100
	0.01	0	100	200
Active trapped	0.01	60	100	0.01
	0.01	60	100	1
	0.01	60	100	100
	0.01	60	100	200

# Траектории

	free passive	free active	trapped passive	trapped active
diffusive underdamped				
diffusive overdamped				
ballistic underdamped				
ballistic overdamped				



# Траектории



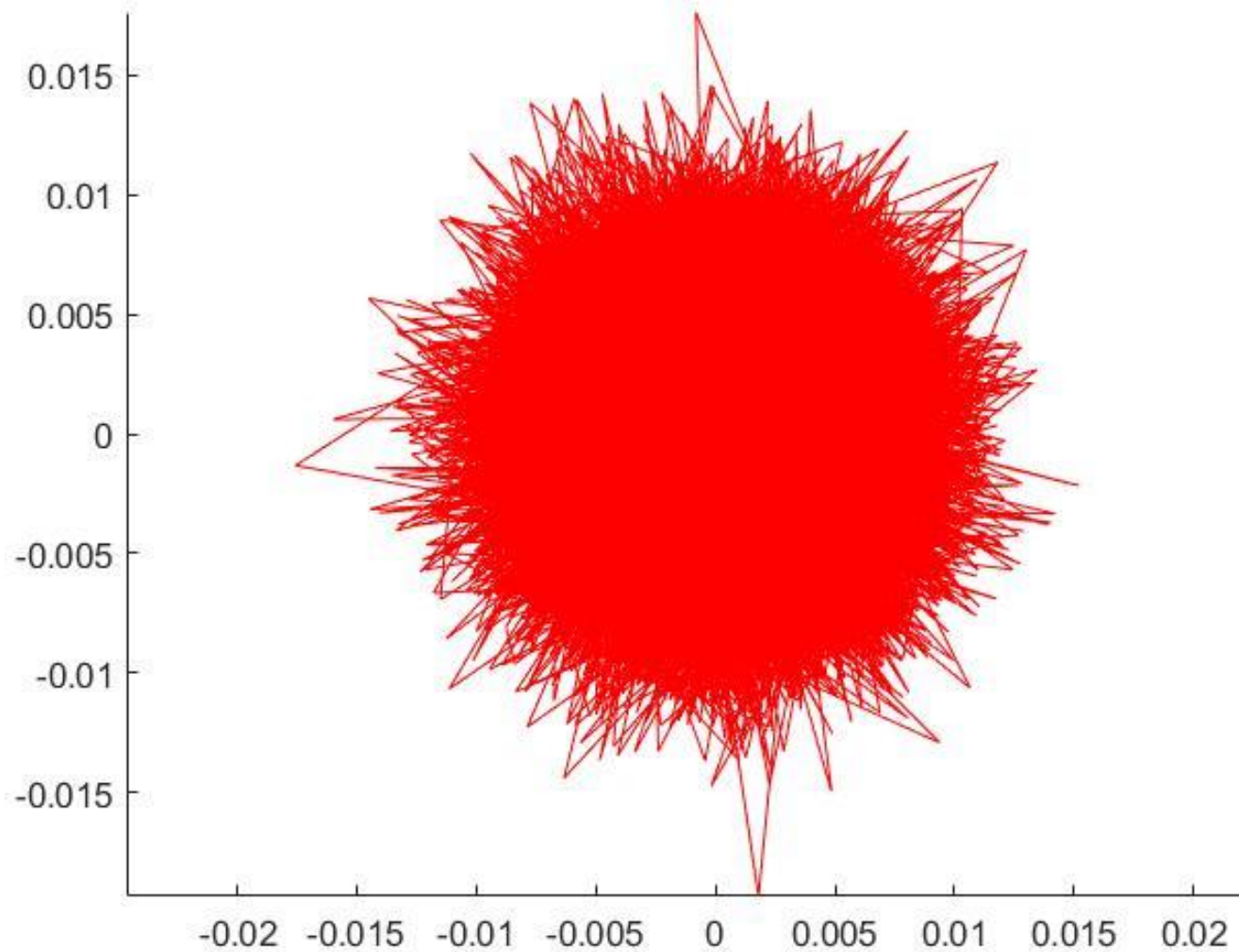
di  
unde

di  
ove

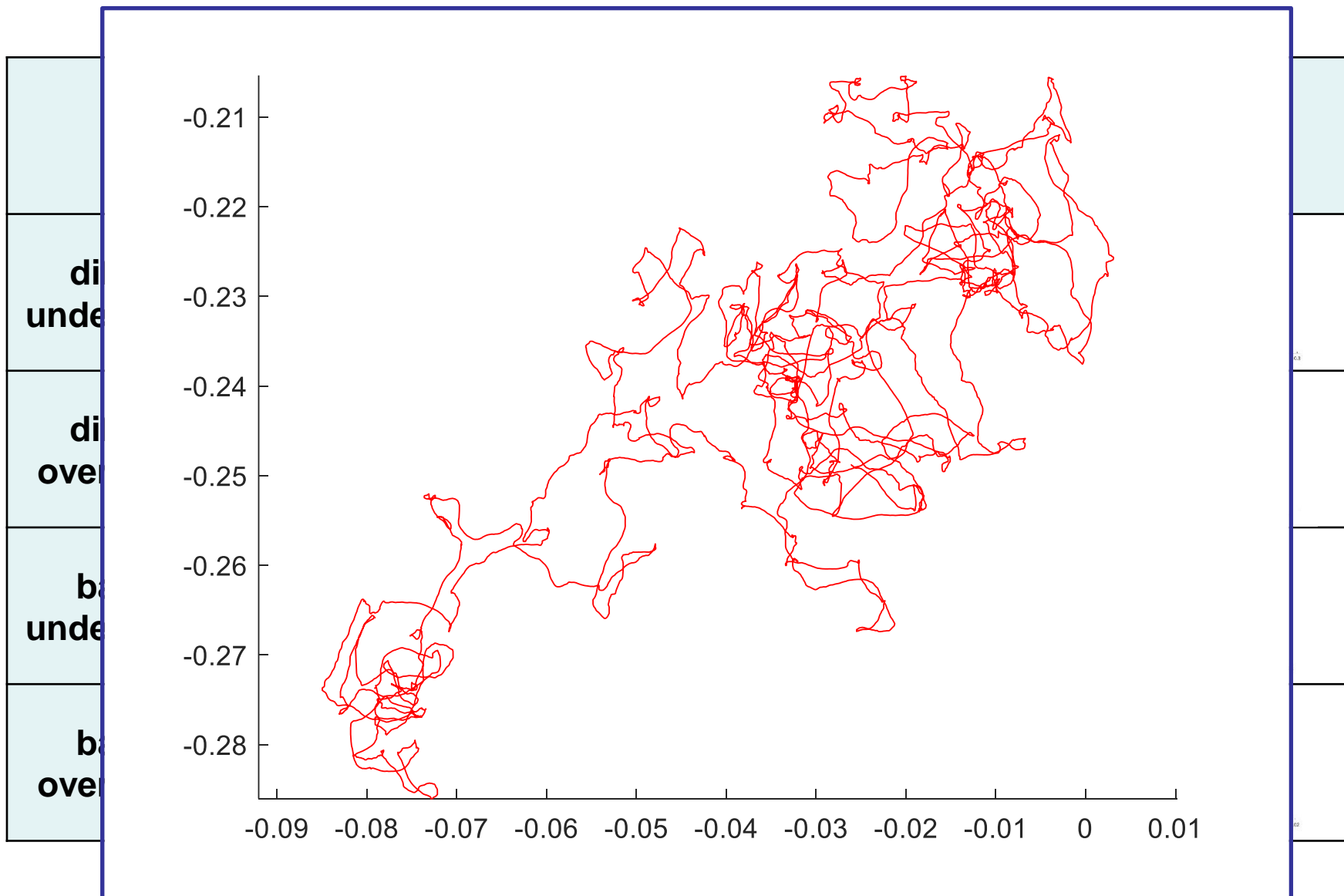
b  
unde

b  
ove

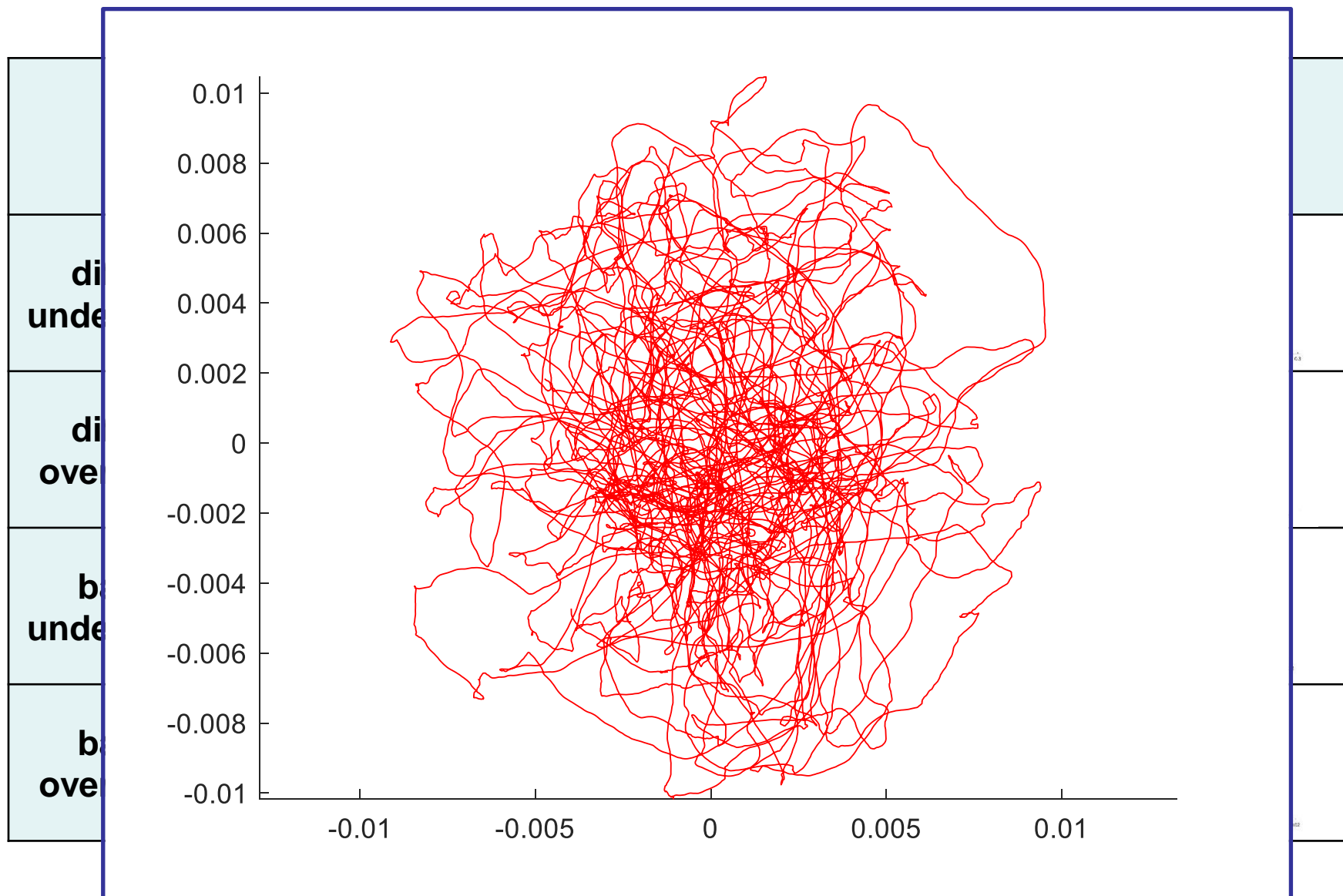
# Траектории

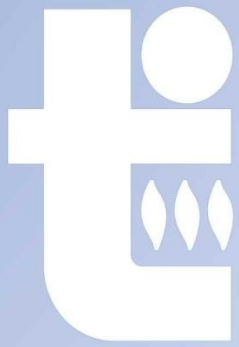


# Траектории



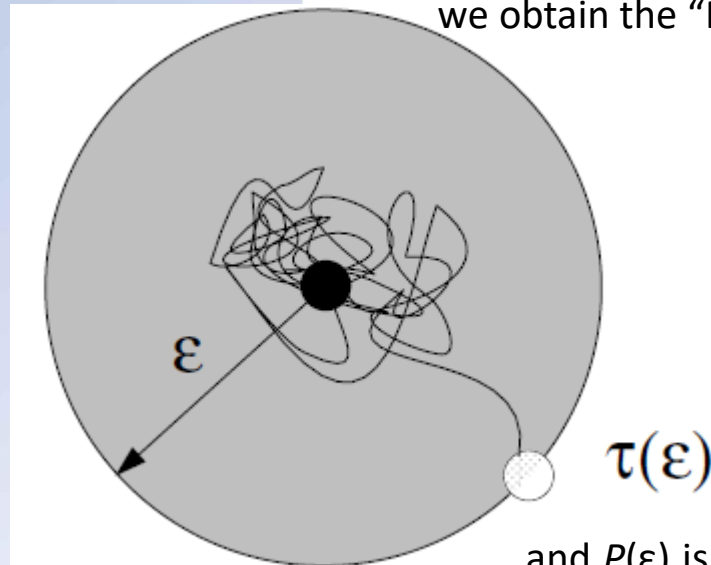
# Траектории





# Динамическая энтропия “первого пересечения” \*

Provided that the spatial scale  $\varepsilon$  isn't very small, one can estimate the dynamic entropy by drawing up the sphere of radius  $\varepsilon$  around the particle in the moment  $t = 0$ , and then finding the moment of time  $\tau$ , when the trajectory first passes the threshold value  $\varepsilon$ . Averaging this mean first-passage time, MFPT  $\tau(\varepsilon)$  over all the particles of the system, we obtain the “MFPT dynamic entropy”  $S(\varepsilon)$  :



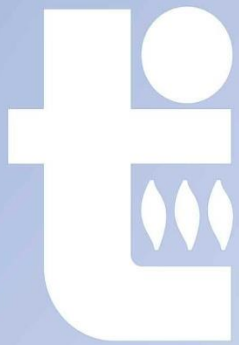
where

$$S(\varepsilon) \equiv 1/\tau(\varepsilon),$$

$$\tau(\varepsilon) = \int_0^{\infty} P_{\varepsilon}(t) t dt$$

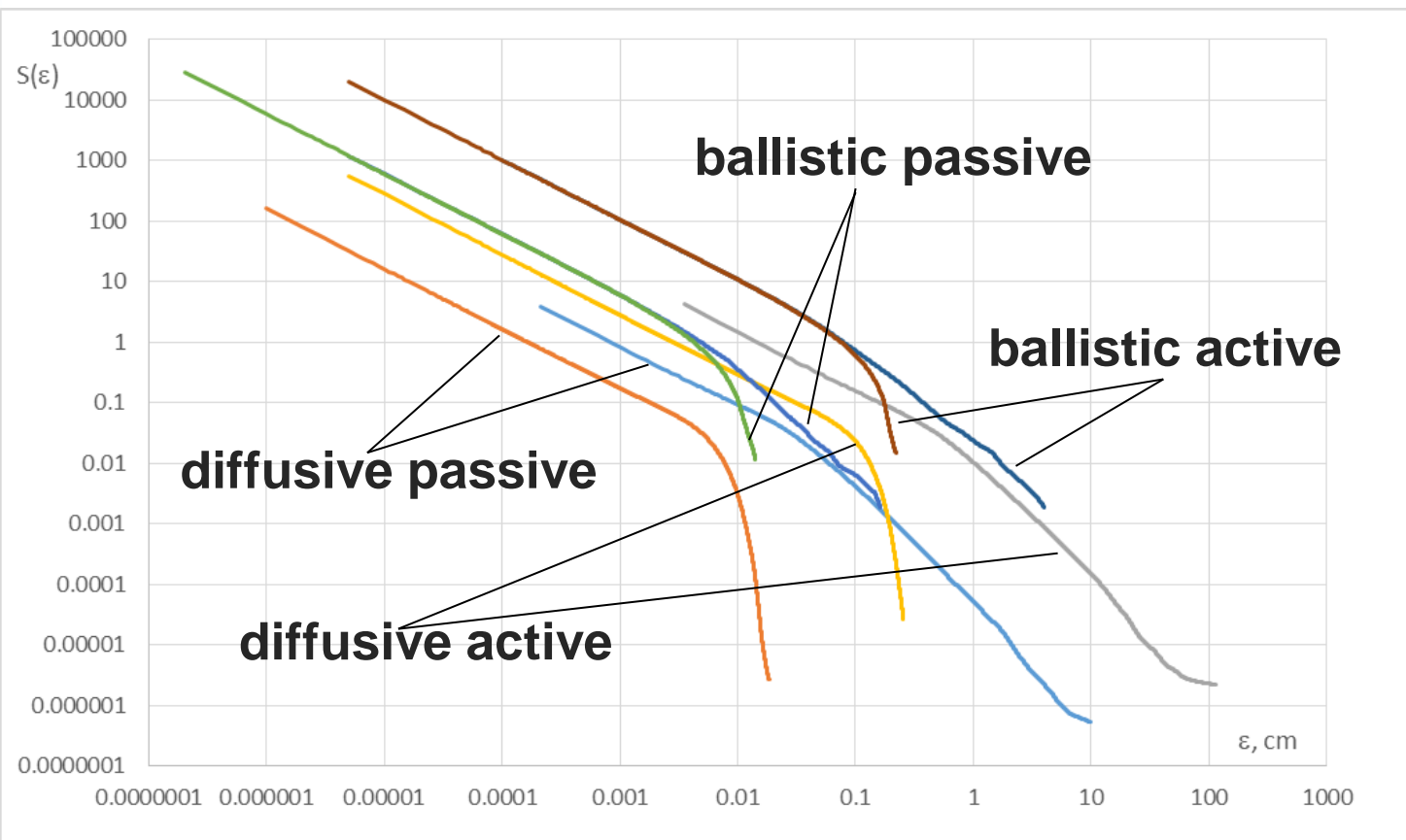
and  $P(\varepsilon)$  is the probability of the particle to reach the border of the sphere  $\varepsilon$  in the moment of time between  $t$  and  $t + dt$ . So, the dynamic entropy  $S(\varepsilon)$  shows how fast the particle leaves its environment.

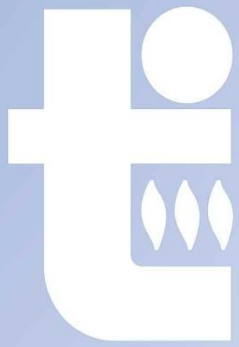
\* Allegrini, Douglas, Glotzer, Phys. Rev. E 60, 5714, 1999



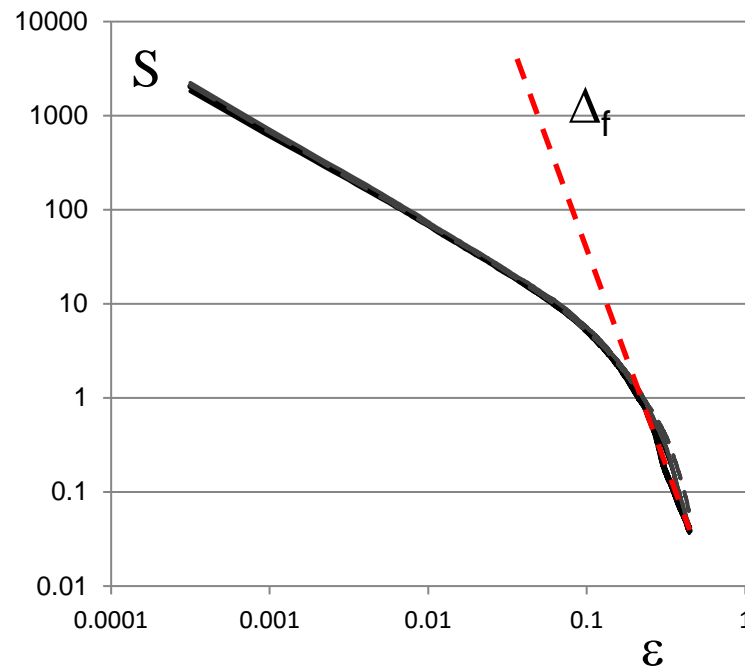
# Динамическая энтропия

## Энтропия



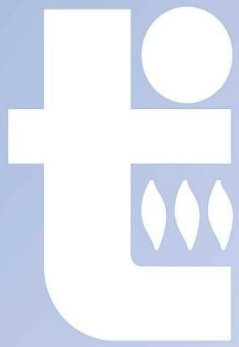


# Применение метода MFPT-энтропии



$$S(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-\Delta_f}$$

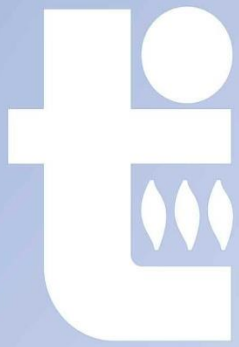
$$d(\log(S(\varepsilon)))/d(\log(\varepsilon)) = ?$$



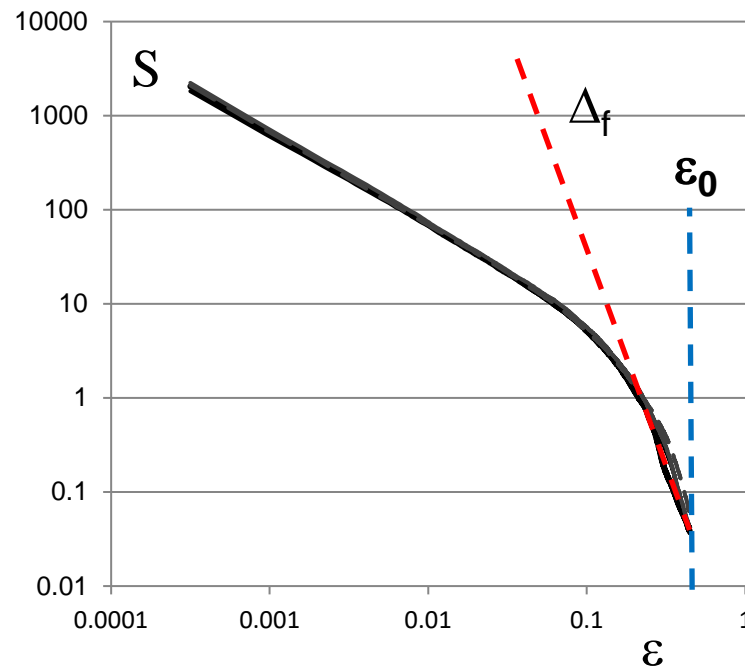
# Фрактальная размерность

	active/passive $V_{sp}$ [cm/s]	trapped/free $\omega_0^2$ [s <sup>-2</sup> ]	underdamped/ overdamped $v_{fr}/\omega$	ballistic/ diffusive $dt \cdot v_{fr}$	FD	Err FD
“Diffusive”	passive	free	underdamped	diffusive	<b>1.83</b>	<b>0.07</b>
	passive	trapped	underdamped	diffusive	<b>2.44</b>	<b>0.68</b>
	active	free	underdamped	diffusive	<b>1.84</b>	<b>0.07</b>
	active	trapped	underdamped	diffusive	<b>2.30</b>	<b>0.65</b>
“Ballistic”	passive	free	underdamped	ballistic	<b>1.67</b>	<b>0.09</b>
	passive	trapped	underdamped	ballistic	<b>1.77</b>	<b>0.32</b>
	active	free	underdamped	ballistic	<b>1.66</b>	<b>0.09</b>
	active	trapped	underdamped	ballistic	<b>1.72</b>	<b>0.30</b>
Active free	active	free	overdamped	ballistic	<b>1.30</b>	<b>0.07</b>
	active	free	overdamped	ballistic	<b>1.54</b>	<b>0.09</b>
	active	free	overdamped	diffusive	<b>1.78</b>	<b>0.10</b>
	active	free	overdamped	diffusive	<b>2.02</b>	<b>0.12</b>
Active trapped	active	trapped	overdamped	ballistic	<b>1.23</b>	<b>0.06</b>
	active	trapped	overdamped	ballistic	<b>1.39</b>	<b>0.14</b>
	active	trapped	overdamped	diffusive	<b>1.43</b>	<b>0.22</b>
	active	trapped	overdamped	diffusive	<b>1.41</b>	<b>0.25</b>





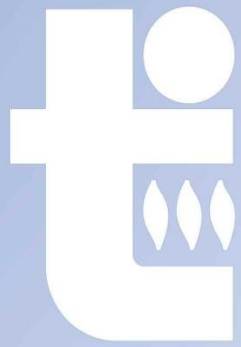
# Применение метода MFPT-энтропии



$$S(\epsilon) \sim (\epsilon)^{-\gamma}$$

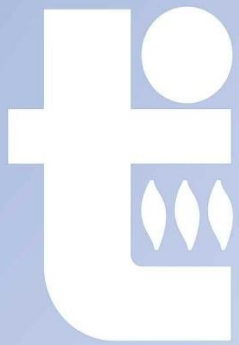
$$d(\log(S(\epsilon)))/d(\log(\epsilon)) = ?$$

$$\epsilon_0 = ?$$

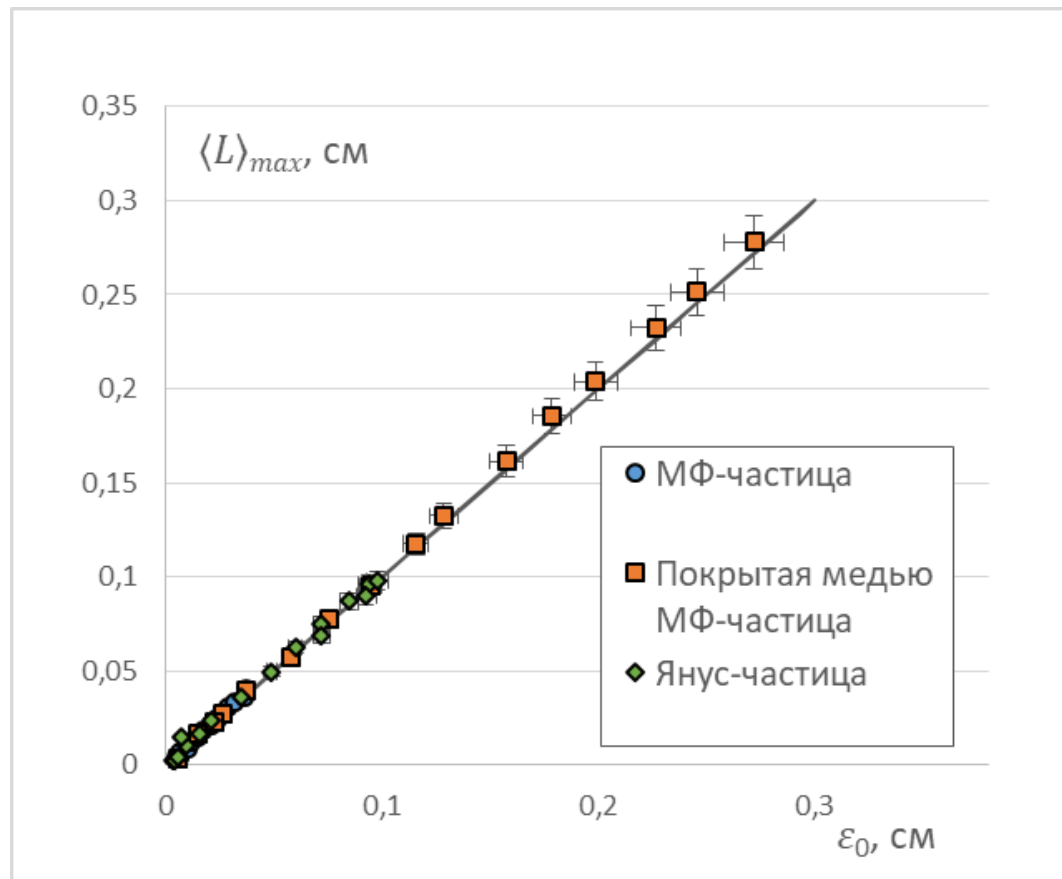


# Область локализации частиц

	active/ passive	trapped/free	underdamped/ overdamped	ballistic/ diffusive	$\epsilon_0$
<b>“Diffusive”</b>	passive	free	underdamped	diffusive	<b>9.40</b>
	passive	trapped	underdamped	diffusive	<b>0.02</b>
	active	free	underdamped	diffusive	<b>142.34</b>
	active	trapped	underdamped	diffusive	<b>0.27</b>
<b>“Ballistic”</b>	passive	free	underdamped	ballistic	<b>0.19</b>
	passive	trapped	underdamped	ballistic	<b>0.01</b>
	active	free	underdamped	ballistic	<b>3.36</b>
	active	trapped	underdamped	ballistic	<b>0.23</b>
<b>Active free</b>	active	free	overdamped	ballistic	<b>0.06</b>
	active	free	overdamped	ballistic	<b>0.19</b>
	active	free	overdamped	diffusive	<b>0.31</b>
	active	free	overdamped	diffusive	<b>0.43</b>
<b>Active trapped</b>	active	trapped	overdamped	ballistic	<b>0.02</b>
	active	trapped	overdamped	ballistic	<b>0.02</b>
	active	trapped	overdamped	diffusive	<b>0.02</b>
	active	trapped	overdamped	diffusive	<b>0.02</b>



# Связь максимального среднего смещения и области локализации\*



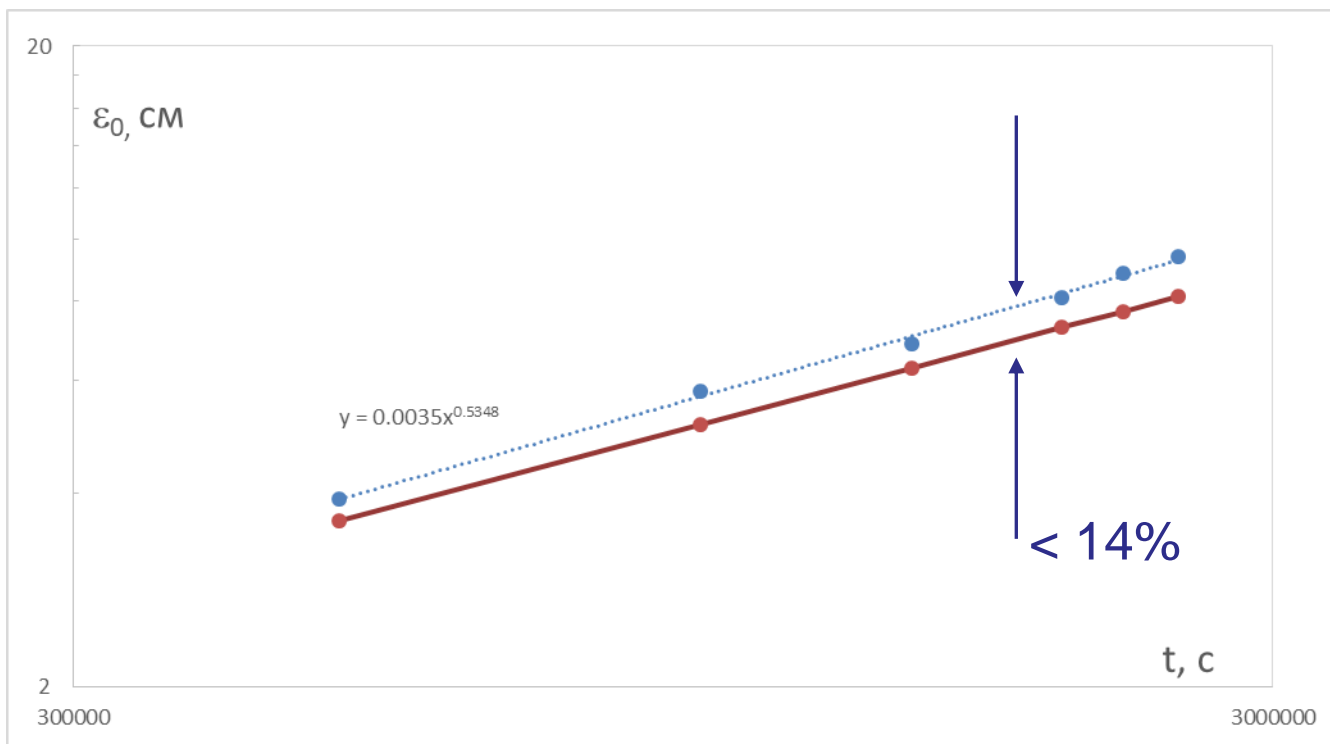
\*Косс К.Г., Лисина И.И., Васильев М.М., Алексеевская А.А., Кононов Е.А., Петров О.Ф.  
Фрактальное броуновское движение коллоидных частиц в плазме  
// Физика плазмы. - 2023. - Т. 49. - №1. - С. 33-41.



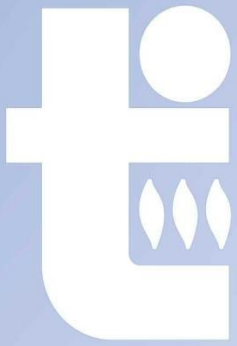
# Область локализации

Diffusive-passive-free-underdamped

$$\langle x_T^2(t) \rangle = 2D_T t \left\{ 1 + \frac{\exp(-\nu_{fr} t) - 1}{\nu_{fr} t} \right\}^*$$



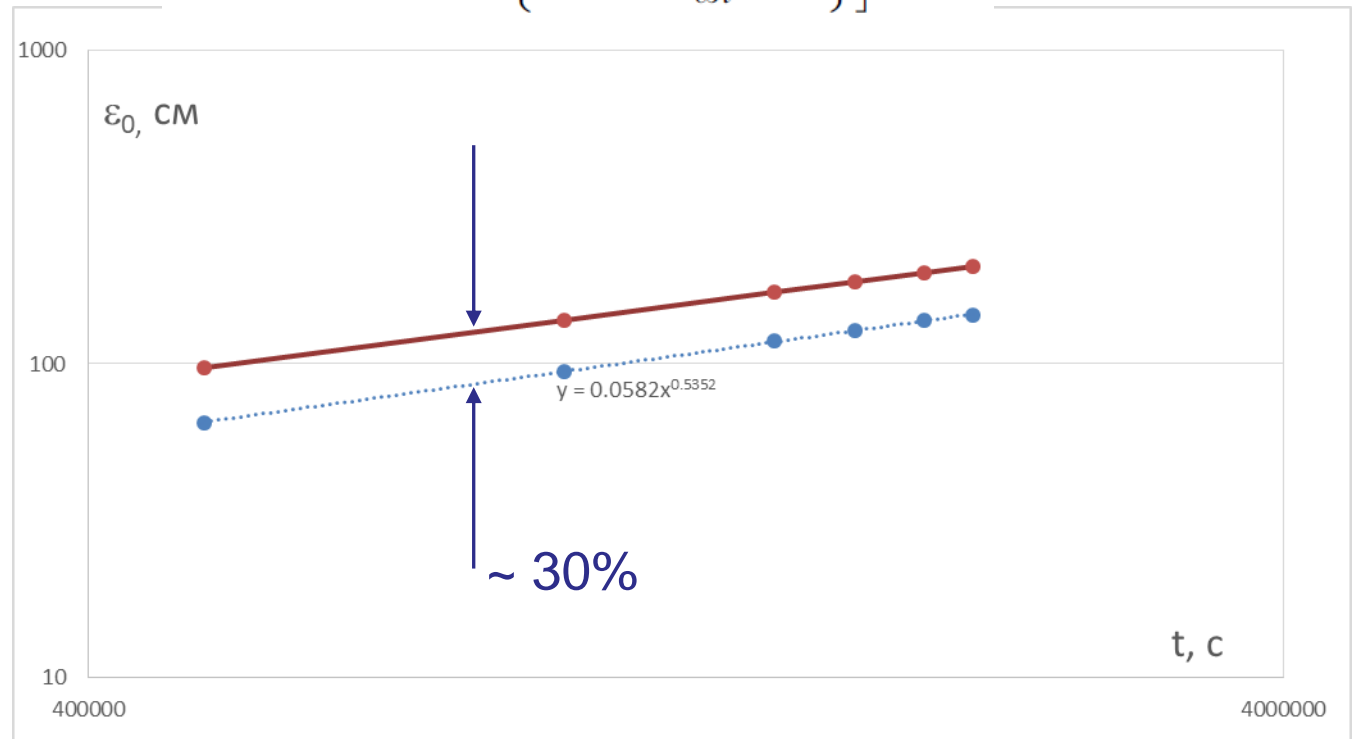
\* Lisin, E. A., Vaulina, O. S., Lisina, I. I., & Petrov, O. F. (2022). Motion of a self-propelled particle with rotational inertia. *Physical Chemistry Chemical Physics*, 24(23), 14150-14158.



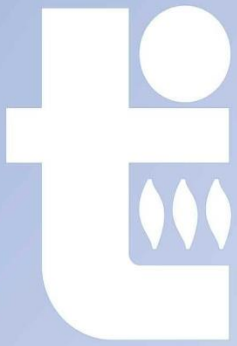
# Область локализации

Diffusive-**active**-free-underdamped

$$\langle x_P^2(t) \rangle = \frac{2D_P t}{\omega^2 - \nu_{fr}^2} \left[ \omega^2 \left\{ 1 + \frac{\exp(-\nu_{fr} t) - 1}{\nu_{fr} t} \right\} - \nu_{fr}^2 \left\{ 1 + \frac{\exp(-\omega t) - 1}{\omega t} \right\} \right]^*$$



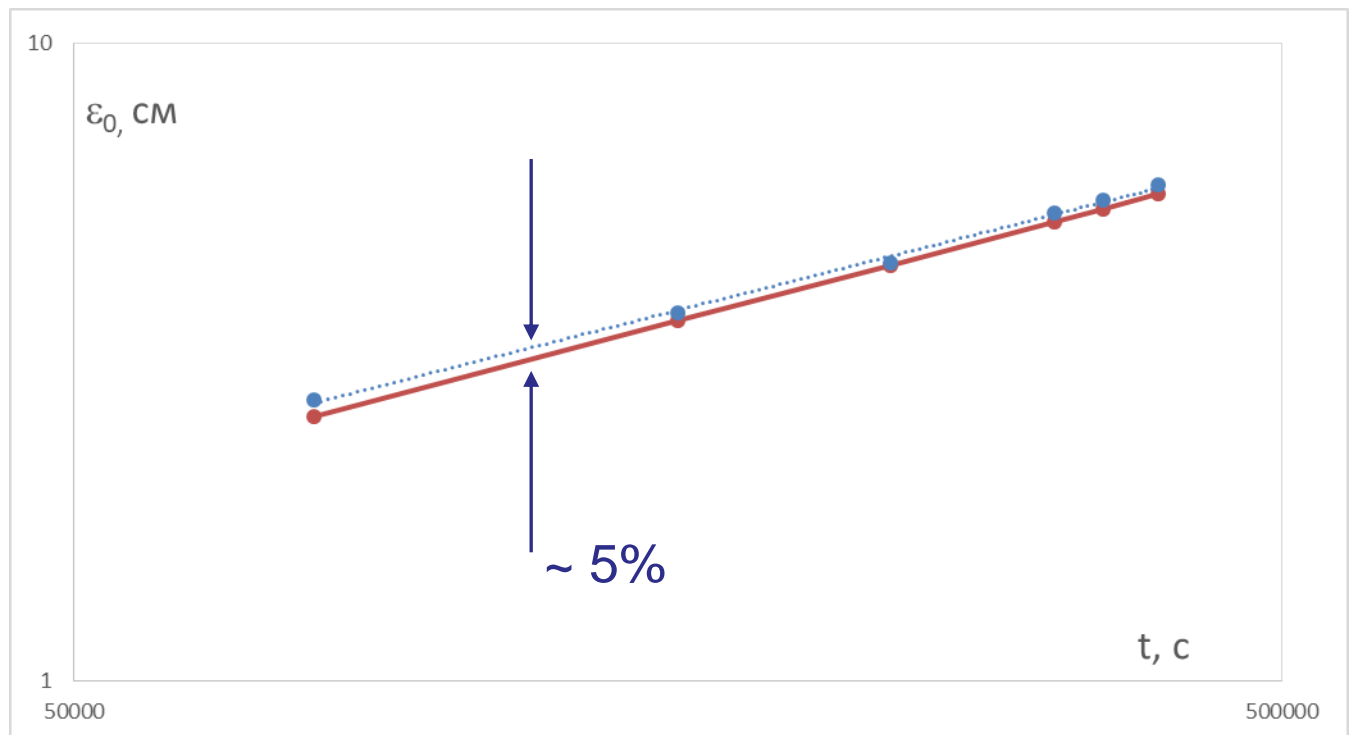
\* Lisin, E. A., Vaulina, O. S., Lisina, I. I., & Petrov, O. F. (2022). Motion of a self-propelled particle with rotational inertia. *Physical Chemistry Chemical Physics*, 24(23), 14150-14158.



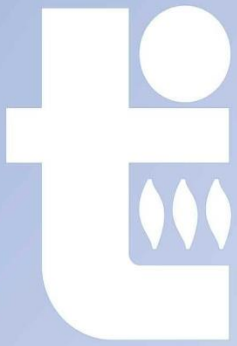
# Область локализации

Diffusive-active-free-overdamped

$$\langle x_P^2(t) \rangle = \frac{2D_{Pt}}{\omega^2 - \nu_{fr}^2} \left[ \omega^2 \left\{ 1 + \frac{\exp(-\nu_{fr}t) - 1}{\nu_{fr}t} \right\} - \nu_{fr}^2 \left\{ 1 + \frac{\exp(-\omega t) - 1}{\omega t} \right\} \right]^*$$



\* Lisin, E. A., Vaulina, O. S., Lisina, I. I., & Petrov, O. F. (2022). Motion of a self-propelled particle with rotational inertia. *Physical Chemistry Chemical Physics*, 24(23), 14150-14158.



# Заключение

- Проведено численное моделирование динамики одиночной коллоидной броуновской частицы на плоскости.
- Рассмотрены различные режимы движения частицы:
  - пассивное / активное,
  - в периодических граничных условиях / в гармонической ловушке,
  - с малым / большим трением,
  - диффузионный / баллистический.
- Фрактальная размерность траектории частицы и область её локализации вычислены из динамической энтропии первого пересечения.
- Выдвинуто предположение, что корректная оценка фрактальной размерности траектории имеет место лишь для “диффузионного” режима, т.е. для  $v_{fr}t \gg 1$ .

**Спасибо  
за  
внимание!**